Durée : 4 heures
Option Economique et Technologique

EXERCICE I

1° Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{2\pi} x^n \sin x \, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{2\pi} x^n \cos x \, dx$$

a) Justifier l'existence de I_n et J_n.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, établir les relations :

$$I_{n+1} = (n+1) J_n - (2\pi)^{n+1} \quad \text{et} \quad J_{n+1} = -(n+1) I_n$$

c) Pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, calculer I_n et J_n.

2° On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2\pi^2}(1 - \cos x) & \text{si } x \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 2\pi] \end{cases}$$

Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire réelle X.

3° ***a)*** Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser les valeurs de $F'(0)$ et de $F'(2\pi)$.

c) Donner le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}$.

4° Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $E(X)$ et de $\sigma(X)$.

5° Calculer les probabilités suivantes :

a) $P\left(\left\{X > \dfrac{\pi}{2}\right\}\right)$

b) $P\left(\left\{X < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } X > \dfrac{3\pi}{2}\right\}\right)$

c) $P\left(\left\{|X - \pi| \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}\right)$

d) $P\left(\left\{X \geq \dfrac{\pi}{2}\right\} \Big/ \left\{X \leq \dfrac{3\pi}{2}\right\}\right)$

(Probabilité conditionnelle de l'événement $\left\{X \geq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ sachant $\left\{X \leq \dfrac{3\pi}{2}\right\}$).

EXERCICE II

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = x^3 + 5x - 1$

1° ***a)*** Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que l'équation $x^3 + 5x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

c) Établir que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

2° Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note (C) la courbe représentative de f dans ce repère.
M_0 est le point de (C) d'abscisse 1. La tangente à (C) au point M_0 coupe l'axe $(O, \vec{i})$ en un point d'abscisse x_1. Soit M_1 le point de (C) d'abscisse x_1. En traçant la tangente à (C) au point M_1 on détermine de façon analogue le point M_2. On construit ainsi par récurrence une suite $\left(M_n\right)$ de points de (C). On désigne enfin par x_n l'abscisse du point M_n.

Établir que : $\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 5}$

3° ***a)*** Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $g(x) = 2x^3 - 3\alpha x^2 + 1 - 5\alpha$
où α est le nombre défini dans la question **1°*b)***.
Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - \alpha$ à l'aide de g et de x_n.
Établir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad x_n > \alpha$$

b) Montrer que la suite $\left(x_n\right)$ est strictement décroissante.

En déduire qu'elle est convergente. Quelle est sa limite ?

4° ***a)*** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \left(x_{n+1} - \alpha\right) - \left(x_n - x_{n+1}\right)$

Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, u_n à l'aide de α et de x_n.

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $h(x) = x^3 - 3\alpha x^2 - 5x + 2 - 5\alpha$
Étudier les variations de h sur $[0, 1]$.

c) Établir que : $\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} - \alpha < x_n - x_{n+1}$

5° ***a)*** Écrire en PASCAL un programme qui calcule x_N et x_{N+1}, où N est le plus petit entier n pour lequel la condition $\left| x_{n+1} - x_n \right| \leq 10^{-5}$ est réalisée.

b) Expliquer pourquoi un tel programme permet d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

PROBLÈME

NOTATIONS

On note $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$.

On désigne par $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On rappelle que, par définition : $\varepsilon_1 = (1,0,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1,0)$ et $\varepsilon_3 = (0,0,1)$.

On pose :

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

Enfin, on désigne par u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant A pour matrice dans la base $\mathcal{E}$.

PREMIÈRE PARTIE : étude de la matrice A

1° ***a)*** Déterminer les valeurs propres de A.

b) A est-elle inversible ?

c) A est-elle diagonalisable ?

2° On pose :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{e} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que P soit la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{e}$ et telle que D soit la matrice de u dans la base $\mathcal{e}$.

b) En utilisant la méthode du pivot de Gauss, montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

c) Justifier rapidement et sans calcul l'égalité : $P^{-1}AP = D$

d) Montrer qu'une matrice Δ de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $\Delta D = D\Delta$ si et seulement si Δ est diagonale.

DEUXIÈME PARTIE : résolution dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation du second degré : $X^2 = A$

On se propose dans cette partie de déterminer toutes les matrices X de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$X^2 = A$$

1° On considère $X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $X^2 = A$; on pose : $Y = P^{-1}XP$.
Vérifier que $Y^2 = D$; montrer que $YD = DY$, puis établir que Y est de la forme :

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma' \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \gamma \in \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \gamma' \in \{-1, 1\}.$$

En déduire la forme de la matrice X puis montrer, sans calculer explicitement les coefficients de X^2, qu'une telle matrice X vérifie bien : $X^2 = A$.

2° Quel est le nombre m de solutions dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation du second degré $X^2 = A$?
Sans calculer explicitement ces m solutions $X_1, X_2, \ldots, X_m$, déterminer leur somme $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$ et exprimer leur produit $T = X_1 X_2 \ldots X_m$ en fonction de A.

TROISIÈME PARTIE : calcul de A^n et application à une étude de suites

1° Soit $n \in \mathbb{N}^*$; calculer D^n puis en déduire l'expression de A^n en fonction de n.

2° Soit a, b et c trois réels.
On considère les suites (p_n), (q_n) et (r_n) définies par :

$p_0 = a$, $q_0 = b$, $r_0 = c$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} p_{n+1} = 16p_n + 4q_n - 4r_n \\ q_{n+1} = -18p_n - 4q_n + 5r_n \\ r_{n+1} = 30p_n + 8q_n - 7r_n \end{cases}$$

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{bmatrix}$

Exprimer U_n à l'aide de A et de U_0 ; en déduire, pour $n \geq 1$, les expressions de p_n, q_n et r_n en fonction de a, b, c et de n.

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b et c pour que les suites (p_n), (q_n) et (r_n) tendent vers une limite finie lorsque n tend vers plus l'infini.

Cette condition étant supposée remplie, que peut-on dire des suites (p_n), (q_n) et (r_n) ?

QUATRIÈME PARTIE : $\mathbf{C}(A) = \{M \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$

1° Montrer que $M \in \mathbf{C}(A)$ si et seulement si $P^{-1}MP$ est diagonale.

2° En déduire que $\mathbf{C}(A)$ est égal à l'ensemble des matrices de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme :

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 \quad \text{avec} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

où M_1, M_2 et M_3 sont trois matrices que l'on déterminera.

3° Montrer que (M_1, M_2, M_3) est une famille libre d'éléments de $\mathbf{C}(A)$. En déduire l'unicité de l'écriture d'une matrice M de $\mathbf{C}(A)$ sous la forme (1).